

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Общие уравнения плоской задачи в полярных координатах

Во многих случаях, когда тело ограничено поверхностями кругового цилиндра и радиально расходящимися плоскостями, плоскую задачу теории упругости удобно рассматривать в полярной системе координат.

Совместив полюс полярной системы координат (r, θ) с началом декартовой системы координат (x, y) , а полярную ось — с осью абсцисс Ox (рис. 1), нетрудно установить связь между координатами произвольной точки M в этих двух системах координат:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta. \quad (1)$$

Обратные зависимости имеют вид

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2)$$

Уравнения плоской задачи теории упругости в полярной системе координат могут быть получены путем преобразования уравнений Т.У. с использованием зависимостей (1) и (2). Однако, более просто вывести все уравнения непосредственно в полярной системе координат.

Уравнения равновесия. Выделим из нагруженного плоского тела бесконечно малый элемент $abcd$ (рис. 2), образованный двумя концентрическими окружностями с радиусами r и $r + dr$ и двумя лучами, проведенными под углами θ и $\theta + d\theta$ к оси Ox . Толщину элемента примем равной единице.

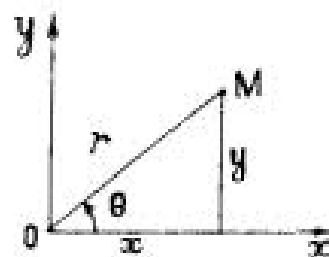


Рис. 1

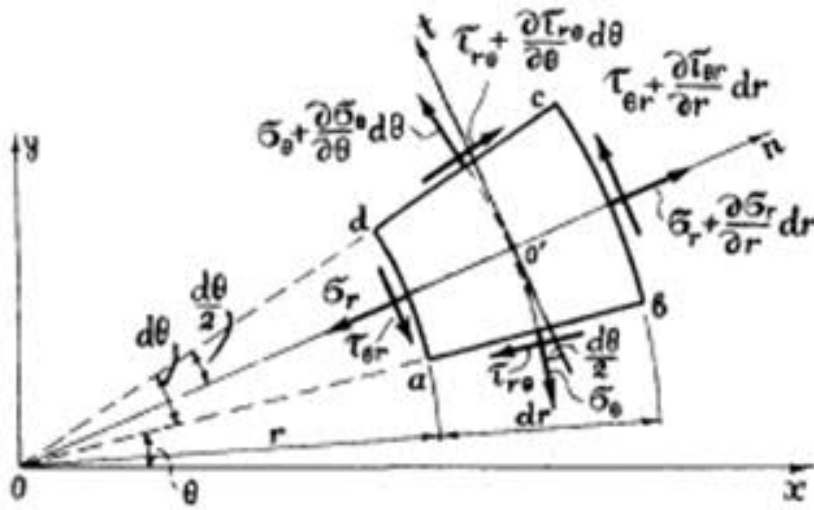


Рис. 2

На гранях ad и ab элемента действуют радиальные σ_r и тангенциальные σ_θ нормальные напряжения и касательные напряжения $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$, а на гранях bc и cd эти напряжения получают соответствующие приращения. Кроме того на элемент могут действовать по направлениям r и θ составляющие R и Θ объемной силы.

Проектируя все силы, приложенные к элементу, на две взаимно перпендикулярные оси $O'n$ и $O't$, проходящие через центр тяжести O' элемента, получим

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \sin \frac{d\theta}{2} - \\ & - \sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{r\theta} dr \cos \frac{d\theta}{2} + R r dr d\theta = 0; \\ & \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \cos \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \\ & - \tau_{\theta r} r d\theta + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \sin \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\theta} dr \sin \frac{d\theta}{2} + \Theta r dr d\theta = 0. \end{aligned}$$

Отбрасывая в этих уравнениях слагаемые, содержащие произведение трех дифференциалов независимых переменных r и θ , и полагая в силу малости угла θ

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}; \quad \cos \frac{d\theta}{2} \approx 1,$$

после деления всех членов на площадь $r dr d\theta$ элемента $abcd$

получим уравнения равновесия для плоской задачи в полярных координатах

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \Theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Геометрические уравнения. Рассмотрим перемещения и деформации бесконечно малого элемента $abcd$ (рис. 3). Перемещение u произвольной точки тела в направлении радиуса называется радиальным перемещением, а перемещение v в направлении, перпендикулярном к радиусу — окружным перемещением. Относительное удлинение ϵ_r стороны ab элемента называется радиальной деформацией, а относительное удлинение ϵ_θ дуги ad — окружной деформацией. Относительная угловая деформация $\gamma_{r\theta}$ представляет собой искажение прямого угла bad .

Рассмотрим каждый вид деформации по отдельности.

Относительное удлинение стороны ab (рис. 3.а) равно разности перемещений точек a и b в направлении радиуса, деленной на первоначальную длину $ab = dr$:

$$\epsilon_r = \frac{bb_1 - aa_1}{ab} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

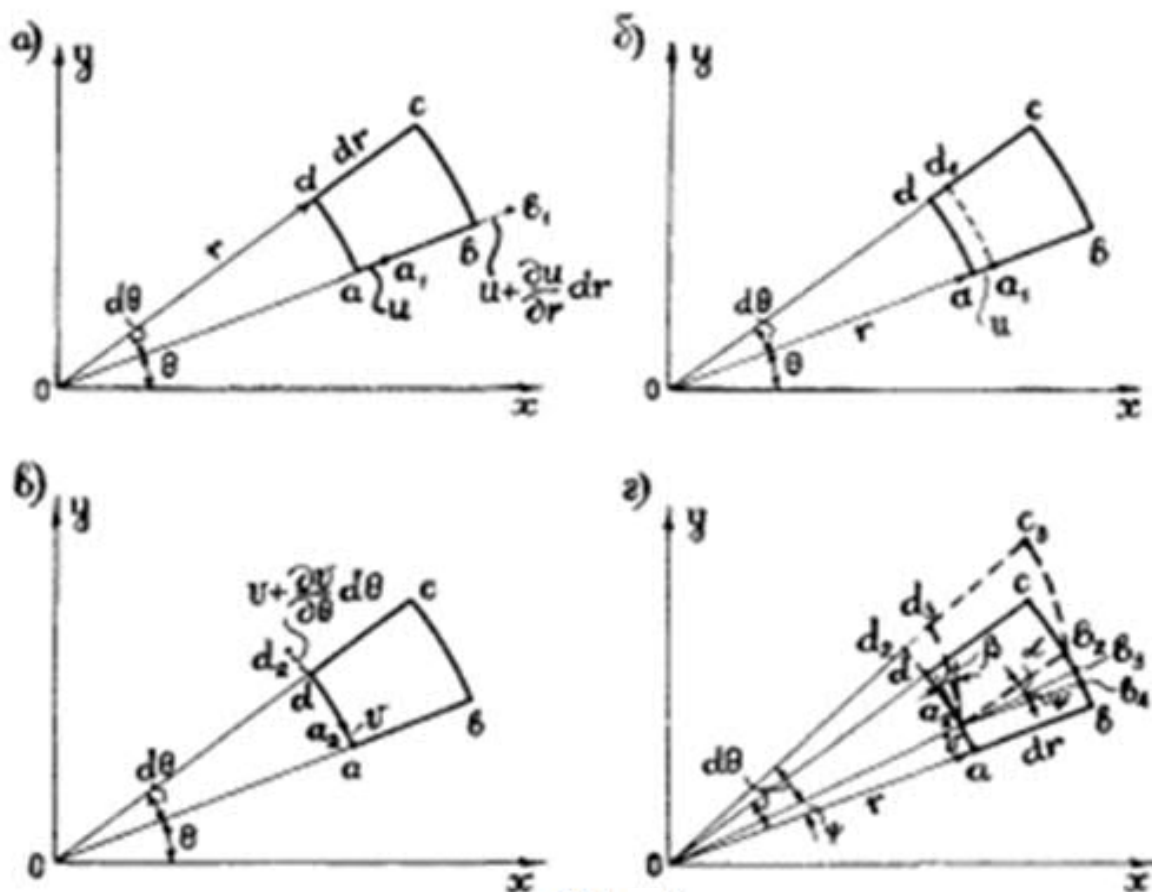


Рис. 3

Окружная деформация ε_θ происходит по двум причинам: вследствие перехода дуги $ad = r d\theta$ на окружность большего радиуса $r' = r + u$ (рис. 3, б), в результате чего длина дуги становится равной $a_1 d_1 = (r + u) d\theta$, а относительное удлинение

$$\varepsilon_\theta^{(1)} = \frac{a_1 d_1 - ad}{ad} = \frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r},$$

и вследствие разности перемещений точек a и d в окружном направлении (рис. 3, в):

$$\varepsilon_\theta^{(2)} = \frac{dd_1 - aa_1}{ad} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta - v}{r d\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Полная окружная деформация равна

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^{(1)} + \varepsilon_\theta^{(2)} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

При определении угловой деформации $\gamma_{r\theta} = \alpha + \beta$ (рис. 3, г) изменение длин сторон элемента $abcd$ с точностью до величин высшего порядка малости можно не учитывать. Поскольку смещение элемента как жесткого целого в направлении радиуса не вызывает искажения его углов, то радиальное перемещение u точки a на рисунке не показано. Жесткое вращение элемента вокруг полюса O на угол $\psi = v/r$ вызывает поворот стороны ab на тот же угол.

Рассматривая рис. 3, г, найдем

$$\gamma_{r\theta} = \alpha + \beta \approx \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{bb_1}{a_1 b_1} + \frac{d_1 d_2}{a_1 d_1} = \frac{bb_1 - bb_4 - b_3 b_4}{a_1 b_1} + \frac{d_1 d_2}{a_1 d_1}.$$

Учитывая, что

$$bb_1 = v + \frac{\partial v}{\partial r} dr; \quad bb_4 = aa_1 = v; \quad b_3 b_4 = \psi dr = \frac{v}{r} dr;$$

$$d_1 d_2 = \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta; \quad a_1 b_1 = dr; \quad a_1 d_1 = ad = r d\theta,$$

после простых преобразований получим

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Выпишем все три геометрические соотношения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (4)$$

Закон Гука. Уравнения закона Гука в полярных координатах получаются из соответствующих уравнений в декартовых координатах заменой индексов x и y на r и θ .

Для плоского напряженного состояния прямые (1.13) и обратные (2.7) уравнения закона Гука записываются в виде

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu \sigma_\theta); \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu \sigma_r); \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta}; \quad (5)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r); \quad \tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta}. \quad (6)$$

Соответствующие уравнения для плоской деформации можно получить из (5) и (6) путем замены постоянных упругости E и μ на приведенные постоянные упругости E_1 и μ_1 , определяемые по формулам

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{1-\mu} \quad (7)$$

Связь между напряжениями в декартовых и полярных координатах. Выделим из плоского тела два бесконечно малых элемента в виде призмы с основаниями, имеющими форму прямоугольного треугольника (рис. 4 и 5). Грани AC , BC и $A'C'$, $B'C'$ элементов параллельны осям Ox и Oy декартовой системы координат. Грань AB на рис. 4, перпендикулярна, а грань $A'B'$ на рис. 5 параллельна радиальному направлению полярной системы координат.

Выражения для напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ через напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} получаются заменой индексов x и y на r и θ и угла α на θ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Эти выражения можно вывести, если спроектировать все силы, приложенные к граням элементов ABC и $A'B'C'$, соответственно на радиальное и окружное направления.

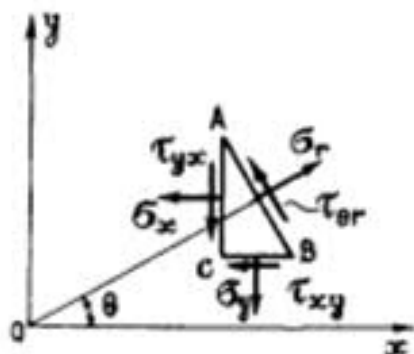


Рис. 4

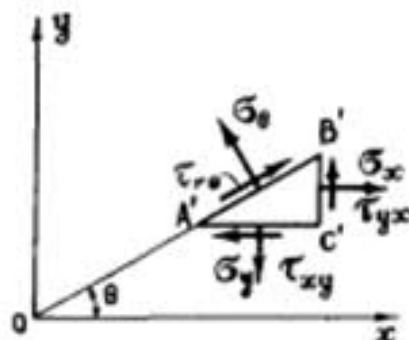


Рис. 5

С помощью несложных преобразований соотношений (8) можно получить выражения для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} через σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Сложив почленно первые две из формул (8) или (9), получим подтверждение известного свойства первого инварианта тензора напряжений при двухосном напряженном состоянии:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta. \quad (10)$$

Уравнения неразрывности деформаций. Ранее было получено уравнение неразрывности деформаций в напряжениях в декартовой системе координат для случая, когда объемные силы постоянны или равны нулю. Это уравнение имеет вид

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

оператор Лапласа.

Для того, чтобы записать оператор Лапласа в полярных координатах, установим связь между частными производными произвольной функции в декартовых и полярных координатах.

Из курса высшей математики известны формулы для определения частных производных сложной функции двух переменных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

С учетом (1) и (2) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta; & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}; & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Используя эти соотношения, найдем частные производные функции φ первого и второго порядка и выражение $\nabla^2 \varphi$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \cos \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \sin \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \cos^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - \\ &\quad - \sin 2\theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + \\ &\quad + \sin 2\theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \cos 2\theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}.$$

Таким образом, в полярной системе координат уравнение неразрывности деформаций плоской задачи в напряжениях для случая, когда объемные силы постоянны или равны нулю, имеет вид

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0, \quad (17)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (18)$$

оператор Лапласа в полярных координатах.

Уравнение неразрывности (17) и уравнения равновесия (3) образуют полную систему трех уравнений с тремя неизвестными σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$.

Как и при решении плоской задачи в декартовых координатах, систему трех уравнений можно свести к одному

битгармоническому уравнению относительно функции напряжений φ , аналогичному уравнению (3.17)

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (19)$$

или в развернутом виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (20)$$

Если формулы (3.15) преобразовать с помощью (14)— (16) и затем подставить в (8), то при отсутствии объемных сил получаются следующие выражения для напряжений через функцию φ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; & \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Если учесть, что напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в полярных координатах при $\theta=0$ совпадают с напряжениями соответственно σ_x , σ_y и τ_{xy} , то соотношения (21) можно получить также из выражений (15) (14) и (16), приняв в них $\theta=0$.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx.$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах

Уравнения равновесия:

$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0,$ $\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau + \Theta = 0,$ где $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \tau$	
---	--

Уравнения Коши:

$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$	
--	--

Физические уравнения закона Гука:

$\sigma_r = E_1(\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = E_1(\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r), \quad \tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta}, \quad E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}$	
---	--

Соотношения, связанные с функцией напряжений

$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$	
---	--

Бигармоническое уравнение

$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \text{ или}$ $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi = 0,$ где $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right),$ $\sigma_\theta + \sigma_r = \nabla^2 \varphi.$	
--	--